

Physikalisches Institut der Rheinischen Friedrich-Wilhelms- Universität Bonn

Protokoll zu

Versuch E111 - Jamin-Interferometer

Fortgeschrittenen Praktikum I

Wintersemester 1998/99

Von

Christian Funke, Torge Szczepanek

Semesterzahl: 7

Hauptfach: Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Theoretische Grundlagen	3
1.1	Herleitung und Beschreibung der Dispersion durch die LORENTZ-LORENZ-Gleichung . . .	3
1.2	Das Pellin-Broca Prisma	5
1.3	Gewichtete lineare Regression	5
2	Versuchsaufbau und Durchführung	7
2.1	Versuchsanordnung	7
2.2	Funktionsweise des Jamin-Interferometers	7
2.3	Justierung der Apparatur	8
2.4	Versuchsdurchführung	8
3	Meßergebnisse und Auswertung	9
3.1	Messung der m Maxima	9
3.2	Berchnung von $(n-1)$ und Korrektur auf Normaldruck und Normaltemperatur	9
3.3	Auswertung der linearen Regression	10
3.4	Berechnung der gesuchten Größen	12
3.4.1	Berechnung von f_0	12
3.4.2	Berechnung von ν_0	12
3.4.3	Berechnung von ϵ_0	12
4	Schlußbemerkung	13

1 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die Mechanismen und Geräte vorgestellt, die zum Verständnis des hier durchgeführten Versuchs notwendig sind.

1.1 Herleitung und Beschreibung der Dispersion durch die Lorentz-Lorenz-Gleichung

Als Dispersion wird im allgemeinen die Abhängigkeit der Brechzahl eines Dielektrikums von der einstrahlenden Wellenlänge bezeichnet. Dieses Phänomen ist unter folgenden Annahmen,

- Isotrope Dielektrika (keine Dipolmomente)
- Elektronen können eine gedämpfte harmonische Schwingung um ihr Ruhepotential ausführen

folgendermaßen zu verstehen:

Das Potential des Elektrons im Coulombfeld des Kerns und des Zentrifugalpotentials läßt sich in der Nähe der Ruhelage als Parabel-(Oszillator-)Potential approximieren. Wenn nun ein äußeres EM-Wechselfeld eingestrahlt wird, wirkt auf das Elektron eine Kraft, die LORENTZ-Kraft:

$$\vec{F} = -e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{v} \times \vec{B}) \right) \quad (1)$$

Aus der Elektrodynamik ist bekannt, daß $|\vec{E}| = |\vec{B}|$, und da die Geschwindigkeit des Elektrons sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, kann in guter Näherung der Einfluß des magnetischen Wechselfeldes vernachlässigt werden. Somit erhält man die aus der klassischen Mechanik bekannte Gleichung der angeregten harmonischen Schwingung.

$$m\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + m\omega_0^2\vec{x} = e\vec{E} \quad (2)$$

Mit Eigenfrequenz ω_0 und Dämpfungskonstante γ .

Für die harmonische Anregung $\vec{r} \approx \vec{E} \approx e^{i(\omega t + \varphi)}$ erhält man die bekannte Lösung:

$$\vec{r}(t) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}(t) \quad (3)$$

An dieser Gleichung kann man erkennen, daß für Frequenzen weit unterhalb der Resonanzfrequenz der Ortsvektor des Elektrons mit dem \vec{E} -Feld in Phase ist, und für höhere Frequenzen gegenphasig (180°) schwingt. Der (komplexe) Dämpfungsterm verhindert das Verschwinden des Nenners und somit die Resonanzkatastrophe. Da nach Annahme 1 das betrachtete Atom kein Dipolmoment besitzt kann nun das durch das Wechselfeld angeregte Dipolmoment des i.-Elektrons berechnet werden:

$$\vec{p}_i = -e\vec{r}_i = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega} \vec{E}_{\text{atomar}}(t) \quad (4)$$

Um nun die Gesamtpolarisation des Atoms zu berechnen muß berücksichtigt werden, daß aufgrund der unterschiedlichen Bahnraden der Elektronen verschiedene Resonanzfrequenzen ω_i existieren, über die summiert werden muß. Somit ergibt sich die Gesamtpolarisation bei einer Dichte von N Atomen pro cm^3 zu:

$$\vec{P} = \frac{Ne^2}{m} \sum_n \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma_n\omega} \vec{E}_{\text{atomar}} \quad (5)$$

Die Größen f_n sind klassisch betrachtet dimensionslose Gewichtungsfaktoren, die angeben, wie groß der Einfluß der Schalelektronen mit den Eigenfrequenzen ω_n auf die Dispersion ist. Die f_n werden Oszillatorstärken genannt.

Aus der phänomenologischen Theorie gilt für die Polarisation isotroper Dielektrika :

$$\vec{\mathbf{P}} = \epsilon_0 \chi \vec{\mathbf{E}}_{\text{anregung}} \quad (6)$$

mit ϵ_0 , der Dielektrizitäts-Konstante des Vakuums, und χ ,der magnetischen Suszeptibilität. Diese errechnet sich über

$$\chi = \kappa - 1 \quad (7)$$

aus der dielektrischen Konstanten κ . Um die obigen beiden Formeln nutzen zu können muß noch die Verbindung zwischen $\vec{\mathbf{E}}_{\text{atomar}}$ und $\vec{\mathbf{E}}_{\text{anregung}}$ gefunden werden. Der gesuchte Ausdruck wurde von LORENTZ hergeleitet und gilt für statische, wie auch für zeitabhängige Felder:

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{atomar}} = \vec{\mathbf{E}}_{\text{anregung}} + \frac{1}{3\epsilon_0} \vec{\mathbf{P}} \quad (8)$$

Der Summand $\frac{1}{3\epsilon_0} \vec{\mathbf{P}}$ wird LORENTZ-Feld genannt, wobei der Vorfaktor rein geometrischer Natur ist. Wenn man nun Gl. (5) in Gl. (8) einsetzt läßt sich $\vec{\mathbf{E}}_{\text{atomar}}$ eliminieren und man erhält:

$$\vec{\mathbf{P}} = \frac{\frac{N\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \epsilon_0 \vec{\mathbf{E}}_{\text{anregung}} \quad (9)$$

wobei

$$\alpha = \frac{e^2}{m} \sum_n \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma_n \omega} \quad (10)$$

Weiteres Einsetzen in Gl. (6) ergibt dann mit der Beziehung $\kappa = n^2$ (n=Brechungsindex) und unter Beachtung von Gl. (7) folgenden Ausdruck:

$$n^2 = \kappa = 1 + \chi = 1 + \frac{\frac{N\alpha}{\epsilon_0}}{1 - \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}} \quad (11)$$

Geeignetes umformen liefert die sog. LORENTZ-LORENZsche-Formel für den Brechungsindex:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{Ne^2}{3m\epsilon_0} \sum_n \frac{f_n}{\omega_n^2 - \omega^2 - i\gamma_n \omega} \quad (12)$$

Für den Versuch machen wir nun folgende Vereinfachungen:

- Die zur Messung des Brechungsindex verwendeten Wellenlängen liegen hinreichend weit entfernt von der nächsten Resonanzfrequenz \Rightarrow der Dämpfungsterm kann vernachlässigt werden.
- Die nächsten Resonanzfrequenzen liegen sehr weit von der nächsten Resonanzfrequenz entfernt \Rightarrow die Summation kann vernachlässigt werden, es muß nur das Glied der nächsten Resonanzfrequenz betrachtet werden
- Für Gase wie z.B Argon ist der Brechungsindex $\approx 1 \Rightarrow$ siehe Gl. (13)

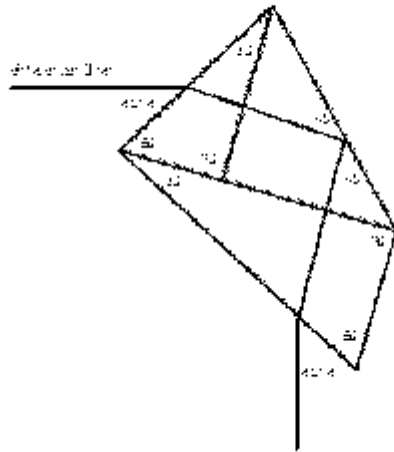
$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \approx \frac{(n + 1)(n - 1)}{3} \approx \frac{2}{3}(n - 1) \quad (13)$$

Somit ergibt sich dann als Bestimmungsgleichung:

$$n - 1 = \frac{N e^2}{2 \epsilon_0 m} \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad (14)$$

Um nun die gesuchten Größen (ν_0 (Resonanzfrequenz), f_0 Oszillatorstärke und die statische Dielektrizitätskonstante) zu bestimmen, wird ν^2 gegen $(n - 1)^{-1}$ aufgetragen und aus Steigung und Ordinatenabschnitt die gesuchten Größen bestimmt.

1.2 Das Pellin-Broca Prisma



Das Pellin-Broca Prisma

Das Pellin-Broca Prisma kann man sich aus zwei $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ Prismen und einem $45^\circ - 45^\circ - 90^\circ$ Prisma zusammengesetzt vorstellen. Da diese Prisma Dispersion zeigt kann es zum Auftrennen der Spektrallinien des im Versuch benutzten Hg- bzw. Cd-Lichtes benutzt werden. Die Besonderheit dieses Prismas liegt darin, daß unter einem bestimmten Winkel (alpha) einfallendes Licht einer bestimmten Wellenlänge (λ_{alpha}) genau um 90° gebrochen wird. Durch diese Eigenschaft lassen sich bestimmte Spektrallinien durch alleiniges Drehen des Prismas selektieren, ohne daß die restliche Apparatur verändert werden müßte.

1.3 Gewichtete lineare Regression

Um die gewichtete lineare Regression einzuführen, erläutere ich zuerst den Begriff des Mittelwertes und der Standardabweichung.

Wenn ein für ein gegebenes x der Wert y n -mal gemessen wird bildet sich der Mittelwert folgendermaßen:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \quad (15)$$

Dabei beschreiben die y_i die einzelnen Meßwerte. Die Standardabweichung, oder der mittlere Fehler berechnet sich somit durch

$$\sigma = \sqrt{\overline{y^2} - \bar{y}^2}. \quad (16)$$

Bei der linearen Regression wird ein linearer Zusammenhang zwischen Parameter und Meßwert angenommen, also

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{x}. \quad (17)$$

Nun besteht die Forderung darin, daß die Summe S der Quadrate des vertikalen Abstandes der Meßpunkte zur interpolierten Geraden zu minimieren. Das heißt die Funktion

$$\mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n}) = \sum_{i=0}^{\mathbf{n}} (\mathbf{y}_i - \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{x}_i)^2 \quad (18)$$

soll bezüglich a und b minimiert werden, somit

$$\frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{0} \text{ und } \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{n})}{\partial \mathbf{b}} = \mathbf{0}. \quad (19)$$

Nach Einsetzen und Ausrechnungen dieser beiden Ausdrücke erhält man die Bestimmungsgleichungen für \bar{a} und \bar{b} , nämlich

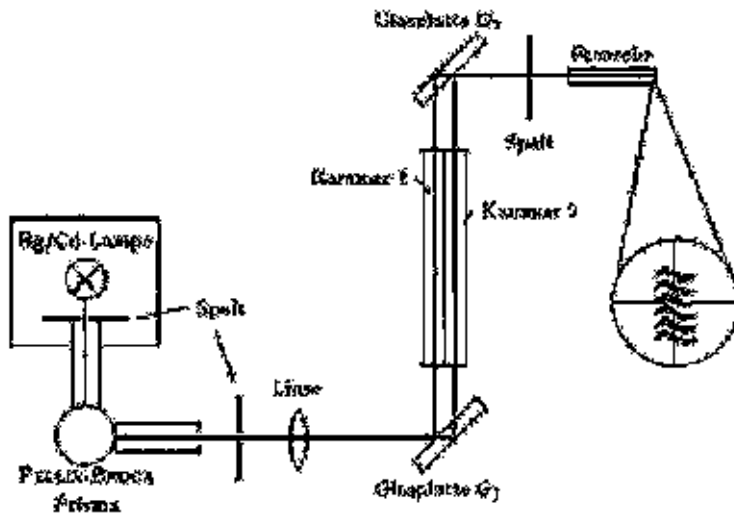
$$\bar{\mathbf{b}} = \frac{\sum \mathbf{x}_i \sum \mathbf{y}_i - \mathbf{n} \sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{(\sum \mathbf{x}_i)^2 - \mathbf{n} \sum \mathbf{x}_i^2} \quad (20)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\sum \mathbf{x}_i \sum \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i - \mathbf{n} \sum \mathbf{y}_i \sum \mathbf{x}_i^2}{(\sum \mathbf{x}_i)^2 - \mathbf{n} \sum \mathbf{x}_i^2} \quad (21)$$

Wobei zu beachten ist, daß sich die Indizes i auf unterschiedliche Wertepaare (x_i, y_i) beziehen. In der Auswertung werden für die y_i die Mittelwerte \bar{y}_i , die wie oben beschrieben ermittelt werden eingesetzt. Die gewichtete lineare Regression kommt nun zum Einsatz, wenn die Standardabweichungen σ_i der einzelnen Meßwerte stark differieren, dann wird nämlich jeder Meßwert noch durch das Quadrat seines Fehlers (also $(\sigma_i)^2$) geteilt, um ein genaueres Ergebnis zu erhalten.

2 Versuchsaufbau und Durchführung

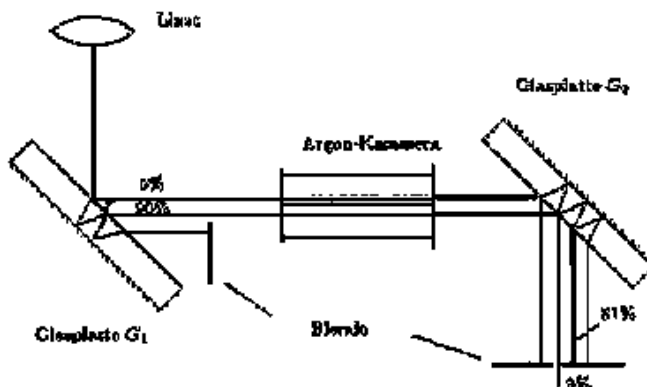
2.1 Versuchsanordnung



Versuchsanordnung

Das Licht der durch einen Holzkasten abgeschirmten Quecksilber- bzw. Cadmium-Dampfampe fällt durch einen Spalt auf das zur Spektralzerlegung und Selektion der Spektrallinien dienende PELLIN-BROCA-Prisma (die Funktionsweise wurde bereits im Theorieteil erläutert). Der zweite Spalt dient zum Ausblenden der anderen Spektrallinien, die um andere Winkel als 90° abgelenkt werden und zum kollimieren der gewünschten Spektrallinie. Durch die Linse kann der selektierte einlaufende monochromatische Lichtstrahl fokussiert werden. Dies sollte so geschehen, daß die Spektrallinie in der Mitte der Argon-Kammern am schärfsten fokussiert sind. Somit werden weitere Interferenz-Effekte die von Reflektionen an den Kammerwänden herrühren könnten weitestgehend eliminiert. Der Lichtstrahl läuft dann durch das JAMIN-Interferometer.

2.2 Funktionsweise des Jamin-Interferometers



Jamin-Interferometer

Der einlaufende Lichtstrahl wird an der im 45° -Winkel angebrachten Glassplatte G_1 der Dicke d zu ca. 10%

reflektiert und tritt in die obere Argon-Kammer ein. Der durchgelassene Strahl wird an der Rückseite von G_1 reflektiert um dann wieder an der Oberfläche zu 90% transmittiert zu werden und tritt in die untere Argon-Kammer ein. Die reflektierten Anteile gelangen nicht in die Argon-Kammer, da sie durch eine Blende (Klebestreifen) ausgeschaltet wurden. An der Glasplatte G_2 geschieht das gleiche wie an G_1 , mit dem Unterschied, daß hier zwei Strahlen auftreffen. Der für die Messung relevante Strahl ist derjenige, der sich aus dem transmittierten-reflektierten-transmittierten Strahl aus der oberen Argon-Kammer und dem reflektierten Strahl aus der unteren Argon-Kammer zusammensetzt (Refraktion). Dieser Strahl hat noch ca. 9% der ursprünglichen Intensität des einfallenden Lichtstrahls. Damit ist dieser wesentlich dunkler als der transmittierte-reflektierte-transmittierte Strahl der unteren Kammer (81% Intensität), der durch einen zweiten Spalt ausgeblendet wird. Der Strahl wird nun durch ein auf unendlich gestelltes Fernrohr betrachtet. Dadurch, daß die Glassplatten nicht exakt parallel sind wird bereits jetzt ein Gangunterschied zwischen den beiden refraktierenden Strahlen erzeugt, so daß bereits jetzt Interferenz-Streifen beobachtet werden konnten, was bei der Justierung äußerst hilfreich war.

2.3 Justierung der Apparatur

Die Justierung gestaltete sich recht aufwendig, da die Strahlen in der Mitte der Argon-Kammern eine scharfe Fokussierung haben sollten (wurde bei entfernten Ar-Kammern mit einem Blatt Papier als Schirm überprüft). Waren sie beim Eintritt in die Kammern recht verwischt, so daß es recht schwer war sie exakt zu trennen. Nach dieser Justierung wurde noch die Blende vor dem Fernrohr so eingestellt, daß nur der Interferenz zeigende Strahl durchlief und ein Maximum an Schärfe und Intensität lieferte.

2.4 Versuchsdurchführung

Die beiden Ar-Kammern wurden nun 5 Minuten mit Ar-Gas gespült, so daß in beiden eine Argon-Atmosphäre mit Umgebungsdruck (abzulesen am Wand-Barometer und in der Kammer eingelassen Druckmesser, der mit Hilfe der an der Apparatur angebrachten Eichtafel umgerechnet werden konnte) herrschte. Nach dem Schließen der Ventile wurde mit Hilfe einer Vakuum-Pumpe eine der beiden Kammern evakuiert. Dadurch wanderten die im Fernrohr betrachteten Maxima nach oben. Die bis zu kompletten Evakuierung (Druck $\leq 0,2\text{mbar}$) am Fernrohr vorbeigewanderten Maxima wurden gezählt. Diese Messung wurde für alle Spektrallinien der Hg- und Cd-Lampe durchgeführt. Die Messwerte wurden auf folgende Weise verwendet:

Für die optische Weglänge in den Kammern gilt:

$$\hat{l} = n * l \quad (22)$$

Mit l =Kammerlänge und n =Brechungsindex. Wenn nun eine Kammer evakuiert wird gilt dort der Brechungsindex des Vakuums (1). Somit gilt für die Differenz der opt. Weglänge:

$$\hat{l}_{\text{Argon}} - \hat{l}_{\text{Vakuum}} = (n - 1)l \quad (23)$$

also

$$n - 1 = \frac{\hat{l}_{\text{Argon}} - \hat{l}_{\text{Vakuum}}}{l} \quad (24)$$

Nun ist die Differenz der beiden optischen Weglängen aber genau m -mal die eingestrahelte Wellenlänge λ (Abstand zwischen Intensitätsmaxima ist genau λ). Somit ergibt sich als Formel:

$$n - 1 = \frac{m * \lambda}{l} \quad (25)$$

Folglich wurde ein Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Brechungsindex gefunden, der für die weitere Auswertung benutzt werden kann.

3 Meßergebnisse und Auswertung

3.1 Messung der m Maxima

Es wurden zuerst die Spektren der Hg- und anschließend die der Cd-Lampe gemessen. Die einzelnen Ergebnisse der Messungen sind in der folgenden Tabelle, mit den zugehörigen Wellenlängen, Temperatur und Druckwerten sowie den jeweiligen Fehlern, aufgelistet.

Spektrallinie	m_1	m_2	\bar{m}	$\lambda[m]$	σ_k^2	$p[hPa]$	$T [^\circ K]$
Hg gelb	161	164	162,5	$5,78571 \cdot 10^{-7}$	18,25	1000	294,99
Hg grün	172	175	173,5	$5,4607 \cdot 10^{-7}$	18,25	1000	295,4
Cd grün	185	187	186	$5,0858 \cdot 10^{-7}$	17	1003	294,55
Cd blau1	197	200	198,5	$4,7999 \cdot 10^{-7}$	18,25	1000	294,21
Cd blau2	203	204	203,5	$4,6788 \cdot 10^{-7}$	16,25	1003	294,65
Hg indigo	205	209	207	$4,3583 \cdot 10^{-7}$	20	1000	295,11

Zu den Messungen sind noch einige Anmerkungen zu machen:

- Aufgrund der Weitsichtigkeit (optisch) eines der Praktikanten ergibt sich für die meisten Spektrallinien (insbesondere die Schwachen) ein zusätzlicher Fehler von ca. ± 4 Strichen, da aufgrund von starkem Tränenfluß z. T. kein präzises Ablesen möglich war. Somit ergibt sich ein korrigiertes σ_k mit $\sigma_k = \sqrt{\sigma^2 + (4)^2}$
- Die beiden gelben Hg-Linien konnten optisch nicht getrennt werden, so daß für die Berechnung der Mittelwert der beiden Wellenlängen verwendet wird
- Die rote Cd-Linie war trotz mehrfachen nachjustierens aufgrund ihrer geringen Intensität nicht auszählbar, so daß keine Meßergebnisse zu dieser Linie Vorliegen. Die violette Hg-Linie war ähnlich schwach ausgeprägt, konnte jedoch noch vermessen werden. Allerdings stellte sich beim Auswerten heraus, daß dieser Wert, selbst mit den großzügig bemessenen Fehlergrenzen, nicht annähernd im vermuteten Wertebereich liegt. Daher wurde er für die lineare Regression ignoriert, wird aber der Vollständigkeit halber hier angeben.

3.2 Berchnung von $(n-1)$ und Korrektur auf Normaldruck und Normaltemperatur

Die Berechnung von $(n - 1)$ erfolgt nun über :

$$n - 1 = \frac{\lambda m}{l} \quad (26)$$

der Fehler berechnet sich über das Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz zu

$$\Delta(n - 1) = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{l} \Delta m\right)^2 + \left(\frac{m}{l} \Delta \lambda\right)^2 + \left(\frac{\lambda m}{l^2} \Delta l\right)^2} \quad (27)$$

Für die Kammerlänge l wurde der Wert 367 mm abgelesen, mit einem abgeschätzten Fehler von ± 2 mm. Die Wellenlänge sollte hinreichend genau bestimmt worden sein. Auch ist leicht ersichtlich, daß ein Fehler, der höchstens bei einigen Å liegen könnte, also im Promille Bereich, gegenüber den Dimensionen

des Zählfehlers von m zu vernachlässigen ist, ähnliches gilt für den Fehler von l , der ebenfalls unter einem Prozent liegt. Somit ergibt sich:

$$\Delta(n-1) = \frac{\lambda}{l} \Delta m \quad (28)$$

Wie aus Gl. 14 ersichtlich gilt $n-1 \sim N$. Nun ist N eine Zahl, die sich über die ideale Gasgleichung

$$p = N \cdot k \cdot T \quad (29)$$

mit p =Druck in mBar und T =Temperatur in Kelvin, sowie der Avogadrozahl k ausrechnen läßt. Da nun alle Theoriewerte sich auf Normalbedingungen ($p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$ und $T_0 = 273,15 \text{ K}$) beziehen muß ($n-1$) ebenfalls auf Normalbedingungen geeicht werden. Es gilt:

$$\frac{(n-1)_0}{(n-1)} = \frac{N_0}{N} = \frac{p_0 T}{p T_0} \Rightarrow (n-1)_0 = \frac{p_0 T}{p T_0} (n-1) \quad (30)$$

Eine Betrachtung der Fehler von T und p mit realistischen Annahmen von $\Delta p = \pm 2 \text{ hPa}$ und $\Delta T = \pm 0,3 \text{ K}$ liefert eine Abschätzung:

$$\sqrt{\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta p}{p}\right)^2} \sim 0,25\% \quad (31)$$

Dieser (unrealistische) Fehler ist bereits um 1,5 Größenordnungen kleiner als derjenige von $(n-1)$ und kann damit ignoriert werden. In der folgenden Tabelle sind nun alle berechneten Werte mit Korrekturen und Fehler angegeben.

Anmerkung: Es wurde bereits die Indigo HG-Linie vernachlässigt !! (Werte physikalisch nutzlos)

$(n-1)[10^{-4}]$	$\Delta(n-1)[10^{-6}]$	$(n-1)_0[10^{-4}]$	$\Delta(n-1)_0[10^{-6}]$	$\lambda[m]$
2,56152	6,73	2,80299	7,03	$5,78571 \cdot 10^{-7}$
2,58256	6,35	2,82884	6,65	$5,4607 \cdot 10^{-7}$
2,57754	5,71	2,80789	6,01	$5,0858 \cdot 10^{-7}$
2,59613	5,58	2,83335	5,88	$4,7999 \cdot 10^{-7}$
2,59438	5,139	2,83566	5,439	$4,6788 \cdot 10^{-7}$

3.3 Auswertung der linearen Regression

Ziel ist es nun die Oszillatorstärke f_0 und die Resonanzfrequenz ν_0 zu bestimmen, dazu wird Gl. 14 in folgende Geraden-Gleichung umgeformt:

$$(n-1)_0^{-1} = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m}{N_0 e^2 f_0} (\nu_0^2 - \nu^2) \quad (32)$$

Das heißt es ergibt sich Gl. 17 mit:

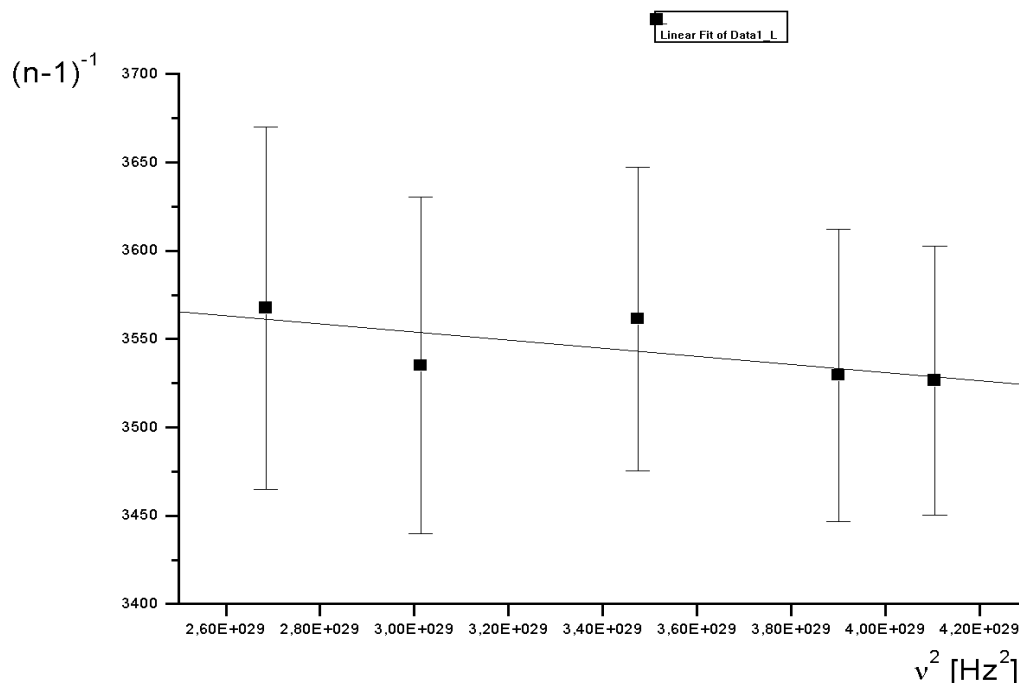
$$\mathbf{a} = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m}{N_0 e^2 f_0} \nu_0^2 \quad \mathbf{b} = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m}{N_0 e^2 f_0} \quad (33)$$

Folglich wird $(n-1)^{-1}$ gegen ν_0^2 aufgetragen. Die Werte können aus der folgenden Tabelle entommen werden. Die Fehler wurden nach dem Gausschen Fehlerfortpflanzungsgesetz bestimmt.

$(n-1)_0^{-1}$	$\Delta(n-1)_0^{-1}$	$\lambda[m]$	$\nu^2[Hz^2]$
3567,6244	102,6	$5,78571 \cdot 10^{-7}$	2,685
3535,02404	95,37	$5,4607 \cdot 10^{-7}$	3,014
3561,39711	86	$5,0858 \cdot 10^{-7}$	3,475
3529,39711	82,898	$4,7999 \cdot 10^{-7}$	3,901
3526,5116	76,355	$4,6788 \cdot 10^{-7}$	4,106

Das Durchführen der gewichteten linearen Regression ergab folgendes Ergebnis:

$$\frac{1}{(n-1)} = a + b\nu^2 = (3623 \pm 47) - (2,303 \pm 1,315) \cdot 10^{-28} \nu^2 \quad (34)$$



PLOT DER MESSWERTE MIT REGRESSIONGERADE

Wie man sieht ist der Fehler in der Steigung $\approx 57\%$, derjenige des Ordinatenabschnittes $\approx 1,2\%$. Diese Betrachtung zeigt, daß bedingt durch die Natur des Versuches ein sehr großes Fehlerpotential besteht, was allerdings durch häufigere Wiederholung der Messung reduziert werden könnte. Die gewichtete lineare Regression stellt hier ein vernünftiges Mittel dar, um aus den doch stark streuenden Meßpunkten (siehe Plot) ein vernünftiges Ergebnis zu erzielen.

3.4 Berechnung der gesuchten Größen

3.4.1 Berechnung von f_0

Aus Gleichung 33 lässt sich nun die Oszillator-Stärke f_0 folgendermaßen bestimmen:

$$f_0 = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m_e}{N_0 e^2 b} = 4,01 \quad (35)$$

Für den Fehler ergibt sich mit dem Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetz:

$$\Delta f_0 = \frac{8\pi^2 \epsilon_0 m_e}{N_0 e^2 b^2} \Delta b = 2,29 \quad (36)$$

Somit folgt:

$$f_0 = (4,01 \pm 2,29) \quad (37)$$

Der theoretische Wert liegt bei $f_{0-Theorie} = 4,62$ ¹. Somit ergibt sich eine Abweichung von $\approx 15\%$ vom Sollwert, was unter den geschilderten Versuchsbedingungen als sehr gut anzusehen ist. Natürlich sind auch die Fehlergrenzen sehr hoch, aber dies ist dem Versuch angemessen.

3.4.2 Berechnung von ν_0

Nun wird die Absorptionsfrequenz ν_0 bestimmt. Indem man Gl. 34 passend umformt erhält man:

$$\nu_0 = \sqrt{\frac{a}{b}} = 3,97 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (38)$$

Mit dem Fehler:

$$\Delta \nu_0 = \frac{1}{\nu_0} \sqrt{\left(\frac{1}{2b} \Delta a\right)^2 + \left(\frac{-1a}{2b^2} \Delta b\right)^2} = 2,25 \cdot 10^{15} \quad (39)$$

Also:

$$\nu_0 = (3,97 \pm 2,25) \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (40)$$

Hier liegt der Theoriewert bei $\nu_0 = 4,23 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ ². Die Abweichung ergibt also $\approx 6,25\%$, was ebenfalls ein sehr gutes Ergebnis darstellt. Auch hier liegt der Fehler etwas über 50%, was aber der für diesen Versuch übliche Rahmen sein sollte.

3.4.3 Berechnung von ϵ_0

Als abschließender Wert wird nun noch die statische Dielektrizitäts-Konstante für Argon bestimmt. Dies geschieht über den Grenzübergang $\nu \rightarrow 0$ und unter Ausnutzung der Beziehung $\epsilon_{statisch} = n^2$ und Gleichung 33. Es ergibt sich:

$$\epsilon_{statisch} = n_{\nu \rightarrow 0}^2 = \left(1 + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right) = 1,000552 \quad (41)$$

¹Aus Flüge: Lehrbuch der theoretischen Physik Bd. III

²ebd.

Der Fehler folgt über:

$$\Delta\epsilon_{\text{statisch}} = 2 \left(1 + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \right) \frac{\Delta a}{a} = 0,000007163 \quad (42)$$

Also erhält man als Ergebnis:

$$\epsilon_{\text{statisch}} = (1,000552 \pm 0,000007136) \quad (43)$$

Der Literaturwert liefert $\epsilon_{\text{statisch}} = 1,000554$ ³, da heißt eine Abweichung von $2 \cdot 10^{-6}$, was wiederum sehr gut im berechneten Fehlerrahmen liegt.

4 Schlußbemerkung

Die Schwierigkeit dieses Experimentes liegt sicherlich im sehr fehlerträchtigen Meßverfahren der Verwendung des Fernrohrs, je nach Sehstärke des Praktikanten stellt dieser Aufbau einen wirklich großen Unsicherheitsfaktor da. Um exaktere Werte zu erhalten, müßten wohl deutlich mehr Meßreihen durchgeführt werden. Aber es wurde eindrucksvoll gezeigt, daß sich aus offensichtlich sehr fehlerbehafteten Daten mit dem geeigneten Verfahren sinnvolle Ergebnisse extrapolieren lassen.

³ebd.