

Fachgruppe Physik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

Protokoll zu

Versuch E208 - Fouriertransformation und nicht-linearer Oszillator

Fortgeschrittenen Praktikum II
Sommersemester 1999

Von
Christian Funke, Torge Szczepanek
Semesterzahl: 8
Hauptfach: Physik

Assistent : S. Bucher

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Fouriertransformation	3
2.2	Schnelle Fourier-Transformation (FFT)	4
2.3	Logistische Gleichung	4
2.4	Toda-Oszillator	4
3	Versuchsaufbau	6
4	Auswertung der Meßdaten	7
4.1	Ideale Abtastung	7
4.2	Simulation realer Abtastung	8
4.3	Reale periodische Schwingungen	9
4.4	Der simulierte Toda-Oszillator	9
4.5	Der reale Toda-Oszillator	10
4.5.1	Berechnung der Feigenbaumkonstanten δ	10
4.5.2	Berechnung der Feigenbaumkonstanten α	11

1 Einleitung

Bei dem Versuch werden die Eigenschaften der schnellen Fourier-Transformation (FFT) mit einem PC studiert. Mit Hilfe von idealen Abtastwerten und simulierten realen Signalen werden die spezifischen Eigenschaften untersucht. Im zweiten Teil des Versuchs wird eine reale periodische Spannung mit Hilfe der FFT spektral untersucht, wobei die zuvor gewonnenen Erkenntnisse berücksichtigt werden sollen. Zuletzt werden am periodisch angetriebenen, nicht linearen RLC-Schwingkreis in den verschiedenen stabilen und chaotischen Bereichen Leistungsspektren in Abhängigkeit von der Amplitude der antreibenden Spannung aufgenommen.

2 Theorie

2.1 Fouriertransformation

Die Fouriertransformierte einer Funktion $f(t)$ ist definiert als

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \quad (1)$$

Hierbei ist $f(t)$ stetig und muß mit wachsenden t schnell genug abfallen. Die Fouriertransformierte $F(i\omega)$ stellt das Frequenzspektrum von f dar und ist symmetrisch in ω . Sie enthält die gesamte Information um f zu rekonstruieren. Hat man jedoch die Funktion f nur in diskreten Werten gegeben, so wie es bei einem Experiment der Fall ist, so muß man die diskrete Fouriertransformation (DFT) durchführen:

$$\bar{F}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{-i\omega t} \quad (2)$$

Da diese DFT periodisch ist, kann man die Summation auf eine Periode einschränken. Wenn man dann noch diskrete Frequenzen betrachtet, so berechnet sich die DFT wie folgt:

$$\bar{F}_m = \bar{F}\left(\frac{2\pi m i}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{n-1} f_n e^{-i(2\pi mn/N)} \quad (3)$$

Dabei reduziert sich aber die Frequenzauflösung auf eine Maximalfrequenz von $\nu_{cutoff} = \frac{N}{T}$. Man erkennt hier schon die Bedeutung des Abtasttheorems, daß besagt:

Um fähig zu sein, $f(t)$ exakt wiederzugeben, muß man $f(t)$ mit einer Rate abtasten, die größer ist, als das Doppelte ihrer höchsten Frequenz.

2.2 Schnelle Fourier-Transformation (FFT)

Um die DFT einer Funktion f mit dem Computer zu berechnen, muß man für jeden Index m, N Produkte ausrechnen, also insgesamt N^2 Produkte. Bei steigendem N wächst somit die Rechenzeit sehr stark an. Man kann die Anzahl der Rechenschritte verkleinern, indem man die Periodizität der Exponentialfunktion ausnutzt und die Berechnung rekursiv in zwei gleiche Teile aufteilt. Hierbei ist es sinnvoll 2^n Abtastwerte zu bestimmen, da man dann die Anzahl am besten sukzessiv halbieren kann. Dadurch verringern sich die Rechenschritte auf $\frac{N}{2} \log_2 N$. Genauere Erläuterungen findet man in der Diplomarbeit von Andreas Peters.

2.3 Logistische Gleichung

Eine einfach nichtlineare Differenzialgleichung stellt die Logistische Gleichung dar:

$$x_{x+1} = f_r(x_n) = r \cdot x_n(1 - x_n) \quad (4)$$

Beginnt man mit einem beliebigen Startwert für x und iteriert die Gleichung bei festem r , so liefert die Iteration folgendes Ergebnis:

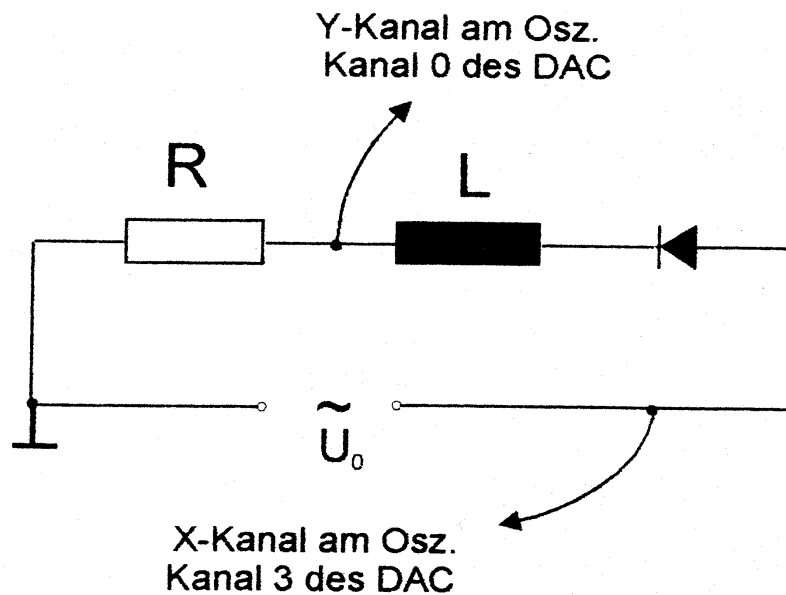
$0 < r < 1$: x konvergiert gegen 0

$1 < 3 < r$: x konvergiert gegen $1 - \frac{1}{r}$. Die Fixpunkte sind hier stabil.

$3 < r$: Der Grenzwert von x ist nicht mehr eindeutig. Die Zahl der Fixpunkte verdoppelt sich immer wieder (Bifurkation) bis die Menge der Fixpunkte chaotisches Verhalten zeigt.

Die Computerberechnung aus dem Anhang zeigt den Verlauf der Fixpunkte. Hier sieht man auch die Einteilung in die Bifurkationsgebiete.

2.4 Toda-Oszillator



Betrachten wir nun den nichtlinearen, elektrischen Serienschwingkreis. Er besteht aus einem Widerstand, einer Spule und einer Diode mit nichtlinearem Kapazitätsverlauf. Analog zum linearen Oszillator kann man eine Schwingungsgleichung aufstellen:

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + U_0 \left(\exp \left(\frac{Q}{C_0 U_0} \right) - 1 \right) = A \cos(\Omega t) \quad (5)$$

mit der Induktivität L , dem Widerstand R und der elektrischen Ladung Q . C_0 und U_0 sind charakteristische Größen der verwendeten Diode. Nach Einführung dimensionsloser Größen kann man sie in zwei gekoppelte Differentialgleichungen überführen.

$$\frac{dq}{dt} \Big|_{n+1} = \frac{dq}{dt} \Big|_n (1 - r \Delta t + (a \cos(n \omega \Delta t) - e^{q_n} + 1) \Delta t) \quad (6)$$

$$q_{n+1} = q_n + \frac{dq}{dt} \quad (7)$$

mit:

$$q = \frac{Q}{C_0 U_0} \quad (8)$$

$$r = R \sqrt{\frac{C_0}{L}} \quad (9)$$

$$a = \frac{A}{U_0} \quad (10)$$

$$\omega = \Omega \sqrt{L C_0} \quad (11)$$

3 Versuchsaufbau

Der Versuch besteht aus einem PC(XT) zur Simulation der idealen und realen Datensätze. Sie werden mit dem Programm FP-FFT.EXE erzeugt und modifiziert und können dann fouriertransformiert werden. In den Computer ist eine Interfacekarte mit integriertem Analog-Digital-Wandler (DAC) eingebaut, über die man reale periodische Spannungen aufnehmen kann. Diese werden von dem Programm FP-MESS.EXE aufgezeichnet, und nach Bedarf fouriertransformiert. Mit der Interfacekarte kann man auch die beiden Spannungen des Todaoszillators erfassen (siehe Abb. 1). An dem Kanal 0 wird der Strom des Schwingkreises gemessen (Spannung über dem Widerstand) und an Kanal 3 kommt die antreibende Spannung. Gegebenenfalls kann ein zweiter Frequenzgenerator, der die Abtastfrequenz der Spannung festlegt an die Interfacekarte angeschlossen werden. Falls diese Frequenz zum Beispiel dreimal so groß ist, wie die Frequenz der zu untersuchenden Schwingung, so hat man ein Abtastverhältnis (APP) von 3. Die so entstandenen Fourierspektren können direkt auf einem Nadeldrucker ausgedruckt werden. Der DAC arbeitet nach dem Wägeverfahren. Der Versuchsaufbau ist in gleicher Form nochmal vorhanden, nur daß hier ein PC(AT) mit 80386 Prozessor zur Verfügung steht. Auf diesem werden analog die Programme FP-FFT93.EXE und FP-MESS93.EXE aufgerufen, die sich aber im Wesentlichen nicht von den obigen Programmen unterscheiden. Wir verwendeten den PC(AT) für unseren Versuch, da hier die Fouriertransformation schneller berechnet werden kann.

4 Auswertung der Meßdaten

4.1 Ideale Abtastung

Bei der idealen Abtastung gibt es mehrere Parameter, die Einfluß auf das Fourierspektrum haben:

- APP: Die Abtastung pro Periode gibt an, wieviele Abtastwerte man pro Periode der Schwingung zur Verfügung hat. Dieser Wert muß nach dem Abtasttheorem größer als zwei sein, damit die Frequenzen richtig rekonstruiert werden können
- N: Die ist die Anzahl der Meßpunkte, die man insgesamt zur Verfügung hat, um die FFT zu berechnen (hier: $N = 2^n$)
- Fenster: Die Funktion deren spezifisches Spektrum zu untersuchen ist.

Das Spektrum wird so normiert, daß der höchste Peak den Wert 1 hat. Die Abszisse wird dargestellt in Einheiten $x = \frac{\text{Frequenz}}{\text{Abtastrate}}$. Untersucht man nun eine reine Sinusfunktion mit APP=3.0 und N=1024 so entsteht im Frequenzspektrum eine Linie bei $x = 0.33$ (siehe Bild 1). Die Linie ist nicht ganz scharf. Eine ganz scharfe Linie kann man erreichen, wenn N ein ganzzahliges vielfaches der APP ist. Um Papier zu sparen haben wir von diesem Bild keinen Ausdruck angefertigt. Wir haben nun die weiteren Parameter untersucht, die auf die Fouriertransformation Einfluß haben. In Bild 2 ist die Abtastung mit weniger Datenpunkten dargestellt (N=32). Die Linie wird wesentlich breiter und ist vor allem aus einzelnen kleinen diskreten Linien aufgebaut. Erhöht man nun von hieraus die Anzahl der Datenpunkt N, so geht die sehr breite Linie in die Linie aus Bild 1 über. Außerdem erhöht sich durch die Anzahl der Datenpunkte die Auflösung, so daß man ab einer gewissen Anzahl von Datenpunkten keine einzelnen diskreten Linien mehr auf dem Bildschirm erkennen kann, die das Frequenzspektrum bilden. Wir lernen daraus, das man für ein möglichst gutes Frequenzspektrum eine große Anzahl von Datenpunkten wählen sollten.

Um den Einfluß der APP auf das Frequenzspektrum zu beobachten, haben wir die Abtastrate unter den kritischen Wert von $APP = 2$ gelegt. Wenn man Bild 3 mit Bild 1 vergleicht, so sieht man zunächst keinen Unterschied. Berücksichtigt man jedoch, das auf der X-Achse $\frac{\text{Frequenz}}{\text{Abtastrate}}$ aufgetragen ist, so fällt auf, das der Peak bei einer anderen Frequenz liegt (Aliasing), als wenn man eine Abtastung wählt, die größer ist, als die Rate, die vom Abtasttheorem als minimale Abtastrate vorgegeben ist. Also muß immer darauf geachtet werden, das die Abtastrate größer ist, als die minimale Abtastrate, die uns das Abtasttheorem vorgibt. Im nächsten Bild (Bild 4) haben wir uns die Fouriertransformierte eines Rechteckes angeschaut. Die Fouriertransformierte eines Rechtecksignals ist eine sinc Funktion ($\frac{\sin(ax)}{ax}$). Dies kann man in dem von uns erstellten Plot sehr schön sehen. Ein Rechtecksignal haben wir nun als Fenster für unsere Sinusfunktion verwendet, da wir nun die Auswirkungen verschiedener Fensterfunktionen auf das Spektrum untersuchen wollen. Man erkennt in dem Plot (Bild 5) den Peak aus Bild 1 wieder. In den Flanken des Peaks zeigt sich die vorher betrachtete sinc-Struktur. Das Rechteckfenster erbringt uns keine Verbesserung in der Schärfe der Linie. Wir erhalten lediglich in den Flanken der Linie eine sinc-Struktur. Die einhüllende dieser Struktur sieht dem Plot in

Bild 1 sehr ähnlich. Das Hanningfenster bringt nun (wie man in Bild 6 sehen kann) eine sehr deutliche Verbesserung. Man sieht kaum noch eine Flanke auf dem Plot. Der Peak ist somit also wesentlich schärfer als im vorangegangenen Beispiel. Die Auswirkungen des Bartlettfensters haben wir hier nicht dokumentiert, da dieses Fenster dem Hanningfenster ähnliche Resultate lieferte. Das Hanningfenster zeigte jedoch eine noch etwas kleinere Flanke. Im nachfolgenden sollte wir also als Fensterfunktion möglichst das Hanningfenster verwenden, um möglichst scharfe Linien zu erhalten. Wendet man das Hanningfenster auf eine Rechteckfunktion an, so kann man kleine Linien neben der Hauptlinie, die unter Verwendung von anderen Fensterfunktionen so nicht sichtbar sind. Bestimmt man die Peakhöhen und vergleicht sie mit theoretische Werten, die man in der Diplomarbeit von Andreas Peters findet, so ergibt sich eine recht gute Übereinstimmung, die in folgender Tabelle gezeigt wird:

Linie	Peakhöhe in der FFT	norm. Peakhöhe	theo. Peakhöhe
Grundwelle	4.3	1.00	1.00
1. Oberwelle	1.55	0.36	0.33
2. Oberwelle	0.85	0.20	0.20
3. Oberwelle	0.7	0.16	0.14
4. Oberwelle	0.5	0.12	0.11

4.2 Simulation realer Abtastung

Bei der realen Abtastung gibt es mehrere Faktoren, die die Qualität der FFT verschlechtern können:

- Rauschen: Da externe Signale mit einem Verstärker aufbereitet werden müssen, ist das Aufmodulieren eines Rauschens unvermeidbar
- Abtastfehler: Zum Abtasten der Werte wird das Eingangssignal alle T Sekunden für w Sekunden abgetastet. Im Idealfall ist dies eine Nadelabtastung, die jedoch in der Realität nicht machbar ist. Es gibt in unserem Fall zwei Möglichkeiten der Werterfassung mit endlicher Abtastweite, nämlich die Maximalwerterfassung, bzw. die Mittelwerterfassung
- Digitalisierungsrauschen: Bei der Digitalisierung des analogen Signals werden Spannungswerten von $U = 0V$ bis $U = U_{max}$ Dualzahlen von 0 bis $2^n - 1$ zugeordnet, wobei n die Anzahl der Bits pro Zahl ist. Es entstehen also diskrete Werte mit dem Abstand $\frac{V_{max}}{2^n}$, wobei ein Digitalisierungsrauschen mit der Amplitude $\frac{1}{2} \frac{V_{max}}{2^n}$ entsteht.

Im weiteren Verlauf des Versuches untersuchten wir nun den Einfluß der Fehlerquellen auf das FFT-Spektrum. Die Angaben an den Bildern haben folgende Bedeutung:

- AA: Abtastzeit pro Abtastintervall ($AA \leq 0.3$)
- RA: Rauschamplitude ($0 \leq RA \leq 1$)
- DG: Digitalisierung (4-, 8-, 12- oder 64- Bit)

Zunächst wurde eine einfach Sinusschwingung simuliert. An der testeten wir die Maximalwert- und Mittelwerterfassung aus. In Bild 7 ist die Mittelwerterfassung zu sehen und in Bild 8 die Maximalwerterfassung. Man sieht deutlich, das bei der Maximalwerterfassung noch kleinere Nebenpeaks zu sehen sind. Die Mittelwerterfassung ist also der Maximalwerterfassung vorzuziehen. In Bild 9 haben wir die drei Sinusfunktionen als Referenz generieren lassen. In Bild 10 erhöhten wir nun die Rauschamplitude auf 0.5. Damit verschwindet der kleine Peak, der vorher noch zu sehen war im Rauschen. In Bild 11 haben wir das Digitalisierungsrauschen dargestellt, was nur bei dieser Auflösung auftritt. Das Digitalisierungsrauschen kommt daher zustande, das nun nur noch $2^4 = 16$ Werte für das digitalisierte Signal zur Verfügung stehen. Das Signal kann also nur in 16 verschiedene Zustände zerlegt werden. Der Fehler der Digitalisierung ist so gross, wie $\frac{1}{2} \frac{1}{16} U_{max}$.

4.3 Reale periodische Schwingungen

In diesem Versuchsteil sollen reale Schwingungen untersucht werden. Dazu sind die Erkenntnisse aus dem ersten Versuchsteil so gewinnbringend wie möglich einzusetzen. Als erstes gaben wir mit dem Funktionsgenerator erzeugte Schwingungen auf das Meßinterface des Computers. Wir wählten eine normale Sinusschwingung (Bild 12). Wie zu erwarten ergibt die Fouriertransformierte eine diskrete Linie bei der eingestellten Frequenz von 2000Hz. Störungen oder Rauschen stellt man in dem Bild nicht fest. Im aufgenommenen Leistungsspektrum (Bild 13) erkennt man ganz deutlich die Auswirkungen der Analog-Digital Wandlung (Treppen an den Flanken des Peaks. Der Peak bei 0 Hz resultiert aus einer Offsetspannung. Die Fouriertransformierte einer Konstanten ist ja eine Delta Funktion bei der Frequenz 0 Hz. Desweiteren haben wir uns noch eine Dreiecksschwingung und eine Rechteckfunktion angeschaut, die wir aber nicht ausgedruckt haben. Diese enthielten (wie zu erwarten) die Frequenzen für die Grundschwingung und die Harmonischen dazu.

4.4 Der simulierte Toda-Oszillator

Das Programm FP-MESS93 bietet die Möglichkeit den Toda-Oszillator zu simulieren. Als freie Parameter kann man die Anzahl der Messpunkte und die Amplitude wählen. Die Anzahl der Messpunkte stellten wir für jede Messung auf den Maximalwert von 1024 Punkten ein, da die Realabtastung mit der gleichen Punktzahl erfolgt. Wir haben mit dem Modell Bilder der verschiedenen interessanten Zonen im Spektrum des Toda-Oszillators aufgenommen. Etwas verwunderlich war dabei die Hilfestellung zur Amplitudenwahl, welche erst erscheint, nachdem man eine Amplitude eingegeben hat. Mit dieser Hilfe ist es dann einfach die verschiedenen Chaosgebiete darzustellen. In Diagramm 27 ist die Grundmode zu sehen. Die antreibende Frequenz ist dabei eine Frequenz von 16966Hz. In Diagramm 25 sieht man das erste Bifurkationsgebiet. Der Oszillator schwingt dabei auf zwei Frequenzen. Die hierfür eingestellte Spannung beträgt hierbei 1.7V. In Diagramm 26 ist das zweite Bifurkationsgebiet zu sehen. Die Spannung hierfür beträgt 1.88V. In Diagramm 28 ist das 3. Bifurkationsgebiet, in Diagramm 29 das 4. Bifurkationsgebiet und in Bild 30 das Chaosgebiet zu sehen.

4.5 Der reale Toda-Oszillator

Zur Untersuchung der realen Oszillatorschwingungen haben wir $APP \approx 2$ eingestellt. Durch Variation der Amplitude haben wir dann das Bifurkationsdiagramm abgefahren. Diagramm 15 zeigt das erste Bifurkationsgebiet. In Bild 16 ist das 2. Bifurkationsgebiet zu erkennen. An dieses schliesst sich das erste Chaosgebiet an, welches in Bild 17 zu sehen ist. Im ersten Chaosgebiet befindet sich ein 5-fach Fenster, welches in Bild 18 zu sehen ist. Bei 3.095V Amplitude haben wir ein 3-fach Fenster gefunden. Das 3. Bifurkationsgebiet haben wir bei 4.028V gefunden (Bild 20). Um den ADC nicht zu übersteuern haben wir nun den Verstärkungsfaktor auf $\frac{1}{2}$ gesenkt. Mit dieser Einstellung haben wir dann das 2. Chaosgebiet (Bild 21) und das 4-fach Fenster im zweiten Chaosgebiet festgehalten. In Bild 23 ist liegt der Verstärkungsfaktor bei $\frac{1}{4}$ und wir haben die Amplitude auf ein Maximum aufgedreht (immer noch 2. Chaosgebiet). In Bild 24 haben wir noch einmal (mit Verstärkungsfaktor $\frac{1}{2}$ das 2. Chaosgebiet aufgenommen.

4.5.1 Berechnung der Feigenbaumkonstanten δ

Die Feigenbaumkonstante δ gibt das Verhältnis zwischen zwei benachbarten Bifurkationsgebieten an. Bezeichnet man die Punkte wo eine Bifurkation in die nächste übergeht als r_n , so kann man schreiben:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \quad (12)$$

Wir haben die r_n gemessen, indem wir das Meßprogramm aufgerufen haben und dann durch Veränderung der Amplitude die Bifurkationspunkte gesucht haben. Auf dem Oszilloskop konnte man die Bifurkationspunkte erkennen. Das Ablesen der Spannung haben wir mit Hilfe des FP-MESS93 Programms durchgeführt. Damit erhielten wir folgende Werte:

r_1	1.35
r_2	3.4
r_3	3.9
r_∞	4.3

Daraus kann man δ zu

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = 4.11 \pm 0.91$$

und

$$\delta = \frac{r_2 - r_1}{r_3 - r_2} = 5.12 \pm 0.87$$

berechnen. Als Mittelwert ergibt sich:

$$\delta = 4.61 \pm 0.89$$

Der Literaturwert für die Feigenbaumkonstante beträgt $\delta = 4.6692$. Unser Wert paßt erstaunlich gut. Man sollte annehmen, das die Abweichung eigentlich viel größer sein sollte, da die Bedingung $n \leftarrow \infty$ nicht erfüllt ist.

4.5.2 Berechnung der Feigenbaumkonstanten α

Aus dem Skript erhält man eine Beziehung für α

$$I^{\bar{n}+1} \approx \frac{1}{\mu} \bar{I}^{\bar{n}} \quad (13)$$

Wobei $\bar{I}^{\bar{n}}$ die gemittelten Intensitäten von $\frac{k}{2^n} \nu_0$ mit k ungerade sind. Für μ gilt:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{4\alpha} \sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \right)} \quad (14)$$

Es folgt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu^2}{16} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^4}{16}}} \quad (15)$$

Für μ folgt:

$$\mu \approx \frac{\bar{I}^{\bar{n}}}{I^{\bar{n}+1}} = 10^{\frac{\bar{I}^{\bar{n}} [dB]}{10} - \frac{I^{\bar{n}+1} [dB]}{10}} \quad (16)$$

Für die Intensitäten lesen wir aus unseren Diagrammen ab:

I_0	$-0dB$
\bar{I}_1	$-9 \pm 2.3dB$
\bar{I}_2	$-24 \pm 5.2dB$

Einsetzen ergibt:

$\mu = 7.9 \pm 1.2$	$\alpha = 3.49 \pm 1.1$
$\mu = 31.6 \pm 3.4$	$\alpha = 13.7 \pm 5.2$

Der Literaturwert für die Feigenbaumkonstante α ist $\alpha = 2.5029$. Der zweite Wert liegt nicht einmal annähernd im Bereich der Feigenbaumkonstante.