

FP-Seminarvortrag

K 123
 β Spektroskopie

Von Christian Funke und

Torge Szczepanek

1 Einleitung

1.1 Was haben wir gemessen?

- Eichung des Spektrometers mit Cäsium 137 (diskrete Konversionslinien)
- Messung der Energieverteilung der β -Teilchen bei Zerfällen von Natrium 22 und Thallium 204.
- Bestimmung des Auflösungsvermögens bei 3 verschiedenen Transmissionen des Spektrometers
- Messung der Maximalenergie der β -Teilchen

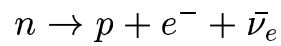
1.2 Auftretende Zerfälle

- ^{204}Tl zerfällt nach ^{204}Pb - reiner β^- Zerfall
- ^{22}Na zerfällt nach ^{22}Ne , welches sich im angeregten 2^+ Zustand nach dem Zerfall befindet - β^+ Zerfall

1.3 Beispielspektrum

2 Kernzerfälle

2.1 β^- Zerfall

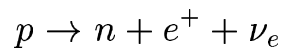


$$\frac{\Delta E}{c^2} = [M(Z, A) - Zm_e] - [M(Z + 1, A) - (Z + 1)m_e + m_e]$$

$$\frac{\Delta E}{c^2} = M(Z, A) - M(Z + 1, A)$$

$$M(A, Z) > M(A, Z + 1)$$

2.2 β^+ Zerfall



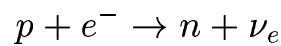
$$\frac{\Delta E}{c^2} = [M(Z, A) - Zm_e] - [M(Z - 1, A) - (Z - 1)m_e] - m_e$$

$$\frac{\Delta E}{c^2} = M(Z, A) - M(Z - 1, A) - 2m_e$$

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + 2m_e$$

2.3 Elektroneneinfang

- Elektronen haben eine endliche Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Kern



$$M_{Mutter}(A, Z) > M_{Tochter}(A, Z - 1) + \epsilon$$

- vor allem bei schweren Kernen
- Kernradius groß-Elektronenbahnradien klein
- meist Electron-Capture aus der K-Schale

2.4 Innere Konversion

- nach einigen β -Zerfällen ist der Kern im angeregten Zustand
- \Rightarrow γ -Quant diskreter Energie wird emittiert
- \Rightarrow Übertragung der diskreten Energie auf ein Hüllenelektron
- \Rightarrow Konversionselektronen diskreter Energie

2.5 Augerelektronen

- kaskadierende Elektronen aus der Atomhülle

2.6 Fermitheorie des β Zerfalls

Nach Goldener Regel #2

$$W_{if} = N(p) dp = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{if}|^2 \frac{dn}{dE_0}$$
$$|H_{if}|^2 = | \langle \Psi_f | H_{if} | \Psi_i \rangle |^2$$

- $N(p)dp$ stellt β -Spektrum dar
- Form wird durch $\frac{dn}{dE_0}$ bestimmt
- $|H_{if}|$ ist Maß für Stärke der β -Wechselwirkung

$$E_e + E_\nu = E_0 \quad E_\nu = p_\nu c$$
$$\Rightarrow p_\nu = \frac{1}{c} (E_0 - E_e)$$

- Rückstoßenergie des Tochterkerns vernachlässigt
- Neutrinomasse vernachlässigt
- Anzahl der unterscheidbaren Zustände im 6-dimensionalen Phasenraumvolumenelement durch Unschärferelation begrenzt

Abzählverfahren für die Energiezustände (statistisches Modell nach Fermi):

$$dn = \frac{a^3 p^2}{2\hbar^2 \pi^2} dp$$

Für die Elektronen- und Neutrinozustände finden wir:

$$dn_e = \frac{a^3 p_e^2}{2\hbar^2 \pi^2} dp_e \quad dn_\nu = \frac{a^3 p_\nu^2}{2\hbar^2 \pi^2} dp_\nu$$

Wahrscheinlichkeit das Elektron im Impulsintervall p_e bis $p_e + dp_e$ und Neutrino im Impulsintervall p_ν bis $p_\nu + dp_\nu$ zu finden ist:

$$\frac{d^2 n}{dE_0} = \frac{dn_\nu dn_e}{dE_0^2} = \frac{a^6}{4\pi^4 \hbar^6} \frac{p_e^2 p_\nu^2}{dE_0} dp_e dp_\nu$$

- $d^2 n = dn_e dn_\nu$
- Neutrinoimpuls nach $p_\nu = \frac{1}{c} (E_0 - E_e)$ ersetzen

Dichte der Endzustände der Elektronen im Energieintervall E_0 bis $E_0 + dE_e$:

$$\frac{dn}{E_0} = \frac{a^6}{4\pi^4 \hbar^6 c^3} p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

- Multiplikation mit dem Übergangsmatrixelement
- \Rightarrow Form des Spektrums
- Normierung auf Volumen a^3

$$|a^3 H|^2 = g^2 |M_{if}|^2$$

- g : Kopplungskonstante der schwachen Wechselwirkung

$$N(p) dp = \frac{1}{2\pi^4 \hbar^7 c^3} g^2 |M_{if}|^2 p_e^2 (E_0 - E_e)^2 dp_e$$

Mit

$$\epsilon = \frac{E}{m_0 c^2}$$

$$\eta = \frac{p}{m_0 c}$$

erhält man dann:

$$N(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi^4 \hbar^7 c^3} g^2 |M_{if}|^2 \eta^2 (\epsilon_0 - \epsilon)^2 d\eta$$

ABER:

- Kernladung vernachlässigt
- die Fermifunktion $F(Z, \eta)$ wird ergänzt

$$N(\eta) d\eta = \frac{1}{2\pi^4 \hbar^7 c^3} F(Z, \eta) g^2 |M_{if}|^2 \eta^2 (\epsilon_0 - \epsilon)^2 d\eta$$

Die Fermifunktion ist durch das Verhältnis der Wellenfunktion des Elektrons, bzw. des Positrons am Kernort zu der des freien Teilchens gegeben:

$$F(Z, E_0) = \frac{|\Psi_e(0)_{Coul}|^2}{|\Psi_e(0)_{frei}|^2}$$

2.7 Kurie-Plot

$$\sqrt{\frac{N(\eta)}{\eta^2 F(Z, \eta)}}$$

gegen

ϵ

\Rightarrow man erhält durch den Schnittpunkt mit der X-Achse die Maximalenergie der Elektronen.

Historisch: Versuch des Neutrinonachweises

- bisher Neutrinomasse vernachlässigt

$$p_\nu = \frac{E_\nu}{c}$$

$$\Rightarrow p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c^3} (E_0 - E)^2$$

- jetzt mit Neutrinomasse

$$p_\nu = \frac{1}{c} \sqrt{E_\nu (E_\nu + 2m_\nu c^2)}$$

$$\Rightarrow p_\nu^2 \frac{dp_\nu}{dE_0} = \frac{1}{c^3} (E_0 - E)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E} \right)^2}$$

- Für das Kurie-Diagramm ergibt sich nun

$$\sqrt{\frac{N(p)}{p^2 F(Z, E)}} = \text{const} \cdot (E_0 - E) \left[1 - \left(\frac{m_\nu c^2}{E_0 - E} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}}$$

- bei $E = E_0 - m_\nu c^2$ ist der Korrekturfaktor null
- Ableitung ist an dieser Stelle unendlich
- \Rightarrow Graph mündet senkrecht auf der X-Achse

2.8 Sollkreis

$$p = eB\rho$$

Elektron startet mit Winkel φ_ρ zum Sollkreis

Nach dem Winkel

$$\phi_\rho = \pi \left(1 + \frac{\rho_0}{B(\rho_0)} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)_{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

trifft es wieder auf den Sollkreis (Fokussierung)

Das gleiche Axial:

$$\phi_z = \pi \left(-\frac{\rho_0}{B(\rho_0)} \left(\frac{dB}{d\rho} \right)_{\rho_0} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

Es gilt:

$$\frac{1}{\phi_\rho^2} + \frac{1}{\phi_z^2} = \frac{1}{\pi^2}$$

Eine stigmatische Abbildung (gleichzeitige Fokussierung) ergibt sich für $\phi_\rho = \phi_z$. Hieraus ergibt sich die Differentialgleichung:

$$\frac{dB}{d\rho} + \frac{1}{2}B = 0$$

mit der Lösung:

$$B = B_0 \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

sowie für den Fokussierungswinkel für die stigmatische Abbildung:

$$\phi = \pi\sqrt{2} \approx 254,56^\circ$$

Detektor hat endliche Öffnungsbreite $\Delta\rho$.

- Breite des Impulsintervalls \propto Magnetfeldstärke

$$\Delta p \approx eB\Delta\rho$$

Deshalb:

$$n(p) \propto \frac{n}{B} \propto \frac{n}{U_H}$$

3 Gemessene Werte

3.1 Korrektur Offsetspannung

- Offsetspannung der gemessenen Hallspannung muß abgezogen werden
- für alle Messungen konstanter Wert der Hallspannung

Wert für die Halloffsetspannung:

$$6,26 \pm 0,05 \text{Skt}$$

- alle gemessenen Hallspannungen werden um die Offsetspannung korrigiert

3.2 Impulsintervallbreite

Zur Erinnerung:

- alle gemessenen Zählraten werden durch die gemessene und korrigierte Hallspannung geteilt

3.3 Eichung mit dem Cäsiumspektrum

- drei verschiedenen Transmissionen
- \Rightarrow Eichung

Gemessene Werte für die Konversionslinienpeaks:

Messung	K-Peak	ΔK	L – Peak	ΔL	HWB_K	ΔHWB	HWB_L	ΔHWB_L
Cs 4%	161,444	0,061	165,657	0,177	1,85	0,128	2,512	0,432
Cs 2%	161,208	0,069	165,340	0,254	1,566	0,133	2,341	0,514
Cs 1%	160,943	0,061	165,163	0,199	1,605	0,128	2,147	0,408

- Messung der Peaks der Konversionslinien
- Eichung über Literaturwerte für E_γ und E_{bind}

$$E_{kin} = e_\gamma - E_{bind}$$

Die Literaturwerte sind:

$$E_{bind-K} = 37,441keV$$

$$E_{bind-L} = \frac{1}{8} \left(2E_{2p_{\frac{1}{2}}} + 2E_{2s_{\frac{1}{2}}} + 2E_{2p_{\frac{3}{2}}} \right) = 5,526keV$$

- Wert für L-Konversionslinien ist gemittelt

Somit lassen sich nun die kinetischen Energien der Elektronen bestimmen:

$$E_{kin-K} = E_\gamma - E_{bind-K} = 624,16keV$$

$$E_{kin-L} = E_\gamma - E_{bind-L} = 656,07keV$$

Nach:

$$B\rho = \frac{1}{ec} \sqrt{E_{kin}^2 + 2E_{kin} \cdot m_e c^2}$$

erhalten wir für die $B\rho$ Werte:

$$B_{\rho_k} = 3381,1Gcm$$

$$B_{\rho_l} = 3499,9Gcm$$

- B_ρ ist proportional zu U_h

Bestimmung der Konstanten m aus:

$$B_\rho = mU_h$$

Für m erhalten wir nach einer linearen Regression:

$$m = (20,990 \pm 0,035) \frac{Gcm}{Skt}$$

- damit haben wir jetzt die Eichung

3.4 Auflösungsvermögen des Spektrometers

$$A = \frac{FWHM[skt]}{U_{peak}[skt]}$$

Für die vier verschiedenen Transmissionen (1%, 2% und 4%) erhalten wir:

Transm.	$U_{peak}[skt]$	$\Delta U_{peak}[skt]$	$Hwb[skt]$	$\Delta Hwb[skt]$	A_{spek}	ΔA_{spek}
4%	161,444	0,061	1,85	0,128	1,146%	0,079%
2%	161,208	0,069	1,566	0,133	0,9714%	0,083%
1%	160,943	0,061	1,605	0,128	0,9972%	0,079%

- je kleiner die Transmission, desto größer das Auflösungsvermögen

3.5 Thallium Spektrum

- Meßzeit 100 Sekunden

3.6 Natrium Spektrum

- Meßzeit 200 Sekunden
- wir messen Positronen
- \Rightarrow Umpolung des Magnetfeldes

3.7 Thallium Kurie-Plot

Für den Impuls:

$$\eta = \frac{p}{m_e c} = \frac{eB\rho}{m_e c} = \frac{ec}{m_e c^2} B\rho = \frac{B\rho}{1704,5 \text{ Gcm}}$$

Und für die Energie:

$$\epsilon = \frac{E}{m_e c^2} = \sqrt{1 + \eta^2}$$

Mit diesen Größen läßt sich nun die Funktion darstellen, die im Kurie-Plot die Ordinate bildet. Sie wird im weitem mit G bezeichnet. Sie ist definiert über:

$$G = \sqrt{\frac{N_{\text{korrr.}}}{\eta^2 F(Z, \eta)}} \quad \text{mit} \quad \Delta G = \frac{1}{2G} \sqrt{\left(\frac{\Delta N_{\text{korrr.}}}{\eta^2 F(Z, \eta)}\right)^2 + \left(\frac{2N_{\text{korrr.}} \cdot \Delta \eta}{\eta^3 F(Z, \eta)}\right)^2} \quad (1)$$

Für die Geradengleichung der Form,

$$y = ax + b,$$

wurden folgende Werte ermittelt:

$$a = -0,16753 \pm 0,01696$$

$$b = 0,37398 \pm 0,03563$$

Daraus für ϵ_0 :

$$\epsilon_0 = 2,232 \pm 0,31$$

Nun gilt für ϵ :

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{E}{m_e c^2} = \frac{m_e c^2 + E_{kin}}{m_e c^2} \\ \Rightarrow E_{kin} &= m_e c^2 (\epsilon - 1)\end{aligned}$$

Somit bestimmt sich die maximale kinetische Energie der Elektronen zu:

$$\begin{aligned}E_{max} &= 629,2 \pm 158,2 \text{ keV} \\ E_{lit} &= 763,41 \text{ keV}\end{aligned}$$

- große Abweichung vom Literaturwert
- sehr niedrige Zählraten erzeugen großen Fehler (Fehler \sqrt{N})
- \Rightarrow besser wäre längere Messung bei Thallium

3.8 Natrium Kurie-Plot

- hier wurde $-1 \cdot B\rho$ aufgetragen
- \Rightarrow besserer Vergleich mit Thallium

für die Gerade $y = ax + b$ ergaben sich die folgenden Werte

$$\begin{aligned}a &= -3,093 \pm 0,108 \\ b &= 6,324 \pm 0,207\end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\epsilon_0 = 2,045 \pm 0,079$$

Daraus folgt für die kinetische Energie der Positronen:

$$E_{kin} = 534 \pm 40 keV$$

$$E_{kin lit} = 545 keV$$